

LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN EN LA ESCUELA

La intención del siguiente documento es clarificar varios aspectos fundamentales a la hora de trabajar estas operaciones en la escuela:

- Las diferentes formas en que se presentan estas dos operaciones (desmontando argumentos muy asentados como que la multiplicación es una suma reiterada o que la división es una resta reiterada).
- El tipo de datos que intervienen en las mismas (decisivos para entender la dificultad de resolución de estas situaciones).
- Las estrategias que se usan para resolver las diferentes situaciones problemáticas que se den, en función de las cuales los clasificaremos en grado de dificultad.
- Proporcionar, de forma razonada, un orden de introducción de estas operaciones en el currículo de matemáticas.

Tipos de datos que se presentan en las situaciones de multiplicación y división.

En las situaciones de multiplicación y división encontramos tres tipos de datos:

Cantidades extensivas:

Hacen referencia al cardinal de un conjunto, a su número de elementos. Vamos a denominarlas **E**.

Ejemplos: 5 manzanas, 3 folios, 4 galletas.

Razones:

Se refieren a la relación (razón) entre dos cantidades de distinta naturaleza, en las que el denominador siempre va a tener como cardinal el número 1. Nos referiremos a ellas con la letra **R**.

Ejemplos: 6 galletas por paquete, 8 manzanas por bolsa, 10 € por cada libro.

Cuantificadores:

Expresan la relación entre dos cantidades de la misma naturaleza. Las nombraremos como **C**.

Ejemplos: 3 veces más, dos veces más grande que, cinco veces menos.

Diferentes situaciones de multiplicación y división en función del tipo de datos

Según los datos que nos aparezcan en un problema se nos pueden presentar dos situaciones:

Asimétricas:

En estas situaciones los datos son de distinta naturaleza. El multiplicando y el multiplicador representan cosas muy bien diferenciadas.

Por ejemplo: Un paquete tiene diez chicles. ¿Cuántos chicles tendremos si compramos tres paquetes iguales?

Estudemos los datos:

El primer dato es una razón: 10 chicles/paquete, el segundo dato es una cantidad extensiva: 3 paquetes. El resultado del problema será también una cantidad extensiva (el número de chicles buscado).

Este problema lo podríamos esquematizar con las siglas:

$$E \times R = E$$

El multiplicador es la cantidad de paquetes comprados y el multiplicando el número de chicles que contiene cada paquete. Se observa que ambos son de naturaleza diferente.

Posteriormente veremos que enfrentarse a situaciones asimétricas resulta mucho más fácil que a las que no lo son y por lo tanto, este hecho se va a convertir en un indicador (no es el único) para clasificar por grado de dificultad los problemas de multiplicación y división.

Simétricas:

En estas situaciones los datos que nos aparecen son de la misma naturaleza. El multiplicando y el multiplicador no están diferenciados.

Por ejemplo: ¿Cuántos tonos de rosa se pueden formar con dos tonos de blanco y tres tonos de rojo?.

Atendiendo al tipo de datos, este problema se clasificaría como:

$$E \times E = E$$

Pero además, se observa claramente que este problema multiplicativo difiere del primer problema planteado como situación asimétrica (intentad haceros un esquema o dibujo para resolverlos y veréis como tenéis que usar diferentes estrategias).

Situaciones multiplicativas: clasificación

Creo que la siguiente tabla será bastante aclarativa. A continuación de la tabla os pongo unos comentarios sobre esta clasificación.

Tipo	Esquema (Según el tipo de datos)	Ejemplo	Estrategias de resolución
Razón	$E \times R = E$	Compro 6 cuadernos a 2 € el cuaderno. ¿Cuánto me cuestan los seis cuadernos?	Suma reiterada
Comparación	$C \times E = E$	Un cuadernos pequeño vale 50 cent. Otro grande cuesta tres veces más. ¿Cuánto vale el cuaderno grande?	Suma reiterada
Conversión	$R \times R = R$	Tengo ocho paquetes en una caja. En cada paquete hay seis galletas. ¿Cuántas galletas tengo en la caja?	Suma reiterada
	$C \times R = R$	Un paquete pequeño trae seis galletas. ¿Cuántas traerá el grande que tiene tres veces más galletas?	Suma reiterada
	$C \times C = C$	Antonio tiene dos veces la edad de Luis y este tiene tres veces la edad de Ana. ¿Cuántas veces es mayor la edad de Antonio que la de Ana?	No es válida la suma reiterada. Hace falta jerarquizar los datos y definir entre ellos una relación de inclusión. Se suele asignar una cantidad inicial al dato menor y a partir de ahí

			establecer relaciones comparativas.
Combinación	$E \times E = E$	¿Cuántas parejas de baile podemos formar con tres chicos y cuatro chicas?	Producto Cartesiano (estrategia multiplicativa)

Comentarios a la clasificación:

- **¿Es la multiplicación una suma reiterada?** Claramente se ve que no. El hecho de que muchas de las situaciones multiplicativas se puedan resolver mediante una estrategia de este tipo ha llevado a definirla de esa manera. Este error produce en los enseñantes una cierta desazón cuando su alumnado no sabe enfrentarse a situaciones como la última descrita en los problemas del tipo Conversión. El hecho es que quizás no se sea consciente de que este tipo de problemas es diferente y hay que trabajarlo de otra forma, mediante otras estrategias resolutivas y en etapas posteriores a aquellos que se pueden resolver mediante estrategias de suma reiterada.
- **Jeraquía de dificultades en estos problemas:**
 - Los problemas de razón y comparación están en un nivel básico de dificultad y son los primeros que se deben usar para introducir estas situaciones en Primaria.
 - En un nivel bastante parecido están los dos primeros tipos de problemas del tipo Conversión.
 - El último tipo de problemas de Conversión y los problemas de Combinación deben introducirse después de trabajar las situaciones de división que se puedan abordar con estrategias más sencillas que las que han de emplearse en este tipo de problemas. Para estos dos tipos de problemas es muy útil el trabajo manipulativo, con representaciones gráficas adecuadas. Por ejemplo, el problema de los tonos de rosa que se pueden obtener con dos tonos de blanco y tres de rojo se puede abordar con estrategias de tablas de doble entrada de este tipo:

Blanco 2	Rosa 4 (Blanco2+ rojo1)	Rosa 5 (Blanco2+ rojo2)	Rosa 6 (Blanco2+ rojo3)
Blanco 1	Rosa 1 (Blanco1+ rojo1)	Rosa 2 (Blanco1+ rojo2)	Rosa 3 (Blanco1+ rojo3)
	Rojo 1	Rojo 2	Rojo 3

- Los problemas de conversión son los que se utilizan para los cambios de unidades de medida, pero este tipo de problemas es más adecuado para Secundaria. En Primaria es mejor usar problemas anclados a contextos significativos para el alumnado, con la finalidad de asentar estas estrategias en el bagaje de conocimientos del mismo.

Situaciones de división: clasificación

Procederemos de la misma forma que en las situaciones de multiplicación.

Tipo	Esquema (Según el tipo de datos y aquel que se desconoce)	Ejemplo	Estrategias de resolución
Razón	$¿E? \times R = E$ Falta el multiplicador. Este tipo de situaciones se denominan: Agrupamiento-Razón O bien División cuotitiva	$¿Cuántos montones iguales puedo hacer con 60 folios repartiéndolos de 15 en 15?$	Resta reiterada, pero la mayoría de alumnado y adultos prefiere sumas reiteradas usando el ensayo-error.
	$E \times ¿R? = E$ Falta el multiplicando. Este tipo de situaciones se denomina: Partición-Razón O bien División partitiva	Con 60 folios he hecho 4 montones iguales. $¿Cuántos folios he puesto en cada montón?$	No sirve la resta reiterada. Reparto equitativo.
Comparación	$¿C? \times E = E$	Un cuaderno grande cuesta 150 céntimos. Otro pequeño cuesta 50 céntimos.	Resta reiterada. Se prefiere una suma reiterada usando el ensayo-error.

	<p>Falta el cuantificador (multiplicador)</p> <p>A estas situaciones se las denomina Agrupamiento-Comparación.</p>	<p>¿Cuántas veces vale más el cuaderno grande que el pequeño?</p>	
	<p>$C \times \text{¿E?} = E$</p> <p>Falta el multiplicando.</p> <p>A estas situaciones se las denomina Partición-Comparación.</p>	<p>Un cuaderno grande cuesta 150 céntimos, tres veces más que otro pequeño. ¿Cuánto cuesta este cuaderno pequeño?</p>	<p>Reparto equitativo.</p> <p>También se usa la suma reiterada por ensayo-error.</p>
Conversión	<p>$R \times \text{¿R?} = R$</p> <p>Falta el multiplicando</p>	<p>Tengo 48 galletas en una caja, guardadas en ocho paquetes iguales que hay dentro de la misma. ¿Cuántas galletas hay en cada paquete?</p>	<p>Reparto equitativo.</p>
	<p>$\text{¿R?} \times R = R$</p> <p>Falta el multiplicador</p>	<p>Tengo 48 galletas en una caja, guardadas en varios paquetes iguales. Dentro de cada paquete hay seis galletas. ¿Cuántos paquetes hay dentro de la caja?</p>	<p>Resta reiterada.</p> <p>Se prefiere una suma reiterada usando el ensayo-error.</p>
	<p>$C \times \text{¿R?} = R$</p> <p>Falta el multiplicando</p>	<p>Un paquete trae 48 galletas y tiene tres veces más galletas que otro más pequeño. ¿Cuántas galletas tiene el paquete pequeño?</p>	<p>Reparto equitativo.</p> <p>También se usa la suma reiterada por ensayo-error.</p>

	<p>$\text{¿C?} \times R = R$</p> <p>Falta el multiplicador</p>	<p>Un paquete trae 48 galletas y otro 16 galletas. ¿Cuántas veces tiene más galletas el primer paquete que el segundo?</p>	<p>Resta reiterada.</p> <p>Se prefiere una suma reiterada.</p>
	<p>$\text{¿C?} \times C = C$</p> <p>Falta un cuantificador del problema.</p>	<p>Antonio tiene 6 veces la edad de Ana. Luis tiene 3 veces la edad de Ana. ¿Cuántas veces tiene Antonio la edad de Luis?</p>	<p>Realizar una estructura inclusiva de los conjuntos del problema, dar un valor al más pequeño y deducir el cuantificador que falta.</p>
Combinación	<p>$\text{¿E?} \times E = E$</p> <p>Falta una de la cantidades extensivas del problema.</p>	<p>Hemos obtenido 20 parejas de baile con 5 niñas y algunos niños. ¿Sabrías decir cuántos niños han intervenido en las 20 parejas?</p>	<p>Inversión de la multiplicación.</p>

Comentarios a la clasificación:

- **¿Es la división una resta reiterada?** Resulta evidente por todas las situaciones que hemos planteado que no. Hay muchas situaciones en las que esta estrategia no es posible. Si pensamos en el segundo tipo de problemas de Razón (partición-razón) veremos que no es posible restar a los folios los montones que he hecho.
- **¿Es la división la operación inversa de la multiplicación?** Matemáticamente no, aunque sí existe una relación estrecha entre ambas operaciones y así se suele enseñar en la escuela en sus estadios iniciales.
- **Se vuelve a observar, al igual que en la multiplicación, que el tipo de datos es crucial para catalogar la dificultad de resolución de los problemas.** En aquellas situaciones que llamamos al principio simétricas, la dificultad es mucho mayor para lograr estrategias accesibles de resolución. Por lo tanto no se deben usar para

introducir la división y se deben relegar a cursos superiores de Primaria.

- **Las situaciones ideales para introducir la división son las llamadas de Agrupamiento-Razón o divisiones cuotitivas**, por su sencillez de planteamiento y de trabajo mediante situaciones manipulativas, enmarcadas en contextos significativos para el alumnado y porque se pueden resolver mediante estrategias que ya figuran dentro de los conocimientos previos posibles en la mente del alumnado: sumas reiteradas por ensayo-error, lo que se denomina cálculo-global- ver método del grupo “El Quinzet”-.
- **En general, el orden en que se puede introducir la división vendría fijado por las posibles estrategias a emplear en la resolución de los problemas y su accesibilidad para el alumnado:** primero aquellas situaciones que se resuelvan mediante restas reiteradas (que normalmente se cambian por sumas reiteradas usando métodos de aproximaciones-redondeo, ensayo-error, propios del cálculo global), después situaciones que se resuelvan mediante repartos equitativos (divisiones partitivas), después situaciones de inversión de la multiplicación y al final situaciones llamadas de Combinación, en las que las estrategias son más complejas y están expuestas en el cuadro anterior.
- **A la vista de ambos cuadros (situaciones de multiplicación y división)**, una buena táctica sería introducir situaciones de multiplicación y división casi seguidas, en sus estadios más sencillos aquí citados, y después ir trabajando situaciones multiplicativas y de división más complejas. Esto acaba un poco con la estructura rígida planteada normalmente en los libros de texto de trabajar la operación multiplicación por completo y después la operación división por completo. En la enseñanza de las matemáticas (bajo mi opinión), es muy perjudicial crear contenidos estancos separados unos de otros.
- **Sigue siendo válido lo comentado para las situaciones de Conversión y de Combinación en las multiplicaciones:** no trabajar en Primaria, en principio, la conversión de unidades mediante esta técnica y usar estrategias manipulativas y gráficas respectivamente.

Consideraciones finales

Siguiendo las indicaciones del aprendizaje significativo, la forma de trabajar en clase cada operación queda bastante especificada en mi documento referente a las estrategias para trabajar las situaciones problemáticas dentro del currículo de matemáticas.

Lo podéis descargar de:

http://www.omerique.net/twiki/pub/CEIPsanjose/TallerMatematicas/Problemas_Primaria_02.pdf

Os recomiendo que visitéis la página donde coloco todas estas ideas en:

<http://www.omerique.net/twiki/bin/view/CEIPsanjose/TallerMatematicas>

El tema de si es conveniente o no memorizar las tablas de multiplicar, es algo que se ha debatido y surge como pregunta en muchos sitios donde se trata este tema. Para salir de dudas, os diré que mi opinión es que sí, es necesario memorizar las tablas, pero de forma razonada. Un excelente método para ello lo encontraréis en el magnífico libro de Carlos Mazas citado en la bibliografía final.

La clasificación de situaciones multiplicativas y de división que aquí presento no es la única que existe y no se puede considerar como definitiva. Existen en la actualidad corrientes de estudio de uso de estrategias por parte del alumnado en aquellos problemas que presentan mayor dificultad que a lo mejor arrojan luz sobre métodos más válidos para su trabajo en clase.

Bibliografía

“Aprendiendo a multiplicar y dividir” artículo de Enrique y Encarnación Castro y Luis Rico. Aparece dentro del libro “Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor” de la editoria CSS.

Enseñanza de la multiplicación y división. De Carlos Maza Gómez. Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis.

Grupo “El Quinzet”. Serie de problemas de cálculo global. Visitar su páginas web (<http://www.elquinzet.com>).

© Juan López Sánchez' 2008

juan.lopez@ya.com